

c) Plot residualerne som funktion af den uafhængige variable (den opløste mængde ammoniumnitrat). Det ligner forhåbentlig illustrationen. Dette er residualplottet knyttet til modellen.

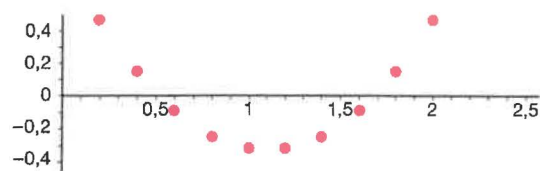


d) Værktøjsprogrammet kan automatisk udregne residualerne og tegne et residualplot.

Få programmet til at udføre dette. Det ligner forhåbentlig det plot, du selv udførte.

(Du kan på bogens **website** finde en vejledning i, hvordan dette udføres i de gængse værktøjsprogrammer).

e) Kommenter kvaliteten af modellen på baggrund af residualplottet. Her omtales som nævnt normalt størrelsen af afvigelserne mellem de empiriske data og modelværdierne, samt om disse afvigelser har en systematisk karakter eller ser tilfældige ud.



Et residualplot, der hører til et andet datasæt og en anden model, hvor  $r^2 = 0,95$ . Afvigelserne er systematiske (de ligger på en "kæde"), så modellen er ikke god.

### Praxis: Fremgangsmåde ved lineær regression

Vi har givet et datasæt. Opgaven går ud på at opstille den bedst mulige lineære model ved anvendelse af regression. Heri ligger et krav om, at vi skal anvende alle punkterne.

1. Indskriv datapunkternes uafhængige og afhængige værdier i det format dit værktøjsprogram kræver for at udføre regression.
2. Plot datapunkterne som en dokumentation af det rimelige i at udføre lineær regression.
3. Få værktøjsprogrammet til at udføre lineær regression og angiv  $a$  og  $b$ -værdierne samt regneforskriften som svar på opgavens spørgsmål.
4. Benyt værktøjsprogrammet til at tegne residualplottet, og kommentér, hvorvidt "kravet" om tilfældig fordeling af datapunkterne i forhold til grafen er overholdt.

### Opgaver

I kapitel 4 findes en række opgaver om emnet lineær regression.

## 8. Lineære funktioner $f(x) = ax + b$

Vi skal i dette afsnit se nærmere på den lineære funktion og dennes karakteristiske egenskaber. For at gøre det, er vi nødt til at have en præcis sprogbrug.

### Definition: Lineær funktion

En variabel  $y$  siges at være en *lineær funktion* af en anden variabel  $x$ , hvis der findes to tal  $a$  og  $b$ , så vi kan skrive sammenhængen på formen:  $y = ax + b$  eller  $f(x) = ax + b$ , fordi  $f(x) = y$ .

Vi kalder  $b$  for *konstantleddet* (eller *begyndelsesværdien*) og  $a$  for *hældnings-koefficienten* (eller *stigningstallet*). Bemærk, at  $ax$  altid betyder  $a \cdot x$ .

### Øvelse 1.40

Angiv konstantled og hældningskoefficient for følgende lineære funktioner:

- 1)  $f(x) = 7x + 23$     2)  $f(x) = 3,9x - 12$     3)  $f(x) = 0,2x$     4)  $f(x) = -2,2x + 0,5$   
5)  $f(x) = x - 100$     6)  $f(x) = -x + 5$     7)  $f(x) = 5$     8)  $f(x) = 0$

### Definition: Grafen for en funktion

Grafen for en funktion, der er givet ved en regneforskrift, består af alle de punkter  $(x, y)$ , der passer ind i regneforskriften.

At et talpar passer ind i regneforskriften betyder, at **ligningen er sand**, når vi indsætter talparret.

Betragt fx den lineære funktion  $f(x) = 4x + 7$ .

Punktet  $(2, 15)$  tilhører grafen, fordi  $f(2) = 4 \cdot 2 + 7 = 15$ , og  $y = 15$ .

Punktet  $(-3, -6)$  ligger ikke på grafen, fordi  $f(-3) = 4 \cdot (-3) + 7 = -5$ , og  $y = -6$ .

### Øvelse 1.41

Betragt den lineære funktion  $f(x) = -3x + 10$ .

Bestem tre punkter, der tilhører grafen.

### Øvelse 1.42

Betragt den lineære funktion  $f(x) = 2x - 3$ .

- a) Hvad er konstantleddet, og hvad er hældningskoefficienten?  
b) Udfyld sildebenet nedenfor.

|            |    |    |    |   |   |   |   |   |
|------------|----|----|----|---|---|---|---|---|
| $x$        | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y = f(x)$ |    |    |    |   |   |   |   |   |

- c) Forklar ud fra sildebenet betydningen af  $b$  og  $a$ .  
d) Afsæt punkterne i et koordinatsystem, hvor  $x$  afsættes ud ad **1. akse**, og  $y$  op ad **2. akse**.  
e) Hvad er den **grafiske betydning** af konstantleddet  $b$ ?  
f) Hvad er den grafiske (geometriske) betydning af hældningskoefficienten  $a$ ?

**Øvelse 1.43**

Vi vil her eksperimentelt undersøge, hvilken indflydelse  $a$  og  $b$  har på grafens forløb.

Benyt dit værktøjsprogram til at tegne grafen for en funktion med forskriften

$f(x) = a \cdot x + b$ , hvor værdien af de to konstanter  $a$  og  $b$  fastlægges ved hjælp af "skydere".

Lad  $b$  løbe i intervallet fra  $-10,0$  til  $10,0$ , og lad  $a$  løbe i intervallet fra  $-4,0$  til  $4,0$ .

- Anvend **variabelkontrol**, hvor  $a$  holdes fast og  $b$  varieres.  
Hvilken betydning har  $b$  for grafens forløb?
- Anvend variabelkontrol, hvor  $b$  holdes fast, og  $a$  varieres.  
Hvilken betydning har  $a$  for grafens forløb?

**Eksempel: Bevis for  $a$ - og  $b$ -tallenes betydning**

Betragt en lineær funktion med forskriften  $f(x) = ax + b$

Det præcise argument for konstantleddets og for hældningskoefficientens egenskab er følgende:

**Konstantleddet  $b$ .**

Hvis vi indsætter  $x = 0$  i formelen, får vi

$$f(0) = a \cdot 0 + b = 0 + b = b$$

**Konklusion:**  $b$  er  $y$ -værdien, når  $x$ -værdien er  $0$ .

**Hældningskoefficienten  $a$ .**

Se på et vilkårligt punkt på grafen med koordinater  $(x_1, y_1)$ . Da punktet ligger på grafen, må der ifølge definitionen på en graf gælde, at  $y_1 = a \cdot x_1 + b$ .

Lad nu  $x_1$  vokse med  $1$ , dvs. vi går  $1$  frem på  $x$ -aksen og når derved frem til punktet  $(x_2, y_2)$ , hvor  $x_2 = x_1 + 1$ . Den tilsvarende  $y$ -værdi, som vi altså kalder  $y_2$ , er derfor givet ved

|                                     |                               |
|-------------------------------------|-------------------------------|
| $y_2 = a \cdot x_2 + b$             | Ifølge forskriften            |
| $y_2 = a \cdot (x_1 + 1) + b$       | Vi har indsat $x_2 = x_1 + 1$ |
| $y_2 = a \cdot x_1 + a \cdot 1 + b$ | Parentesen er ganget ud       |
| $y_2 = a \cdot x_1 + b + a$         | Leddene byttes rundt          |

De første to led på højre side genkender vi som højre side i ligningen med  $y_1$ , så vi indsætter  $y_1$  i stedet for disse to led og får:

$$y_2 = y_1 + a$$

**Konklusion:** Når den uafhængige variabel  $x$  vokser med  $1$ , vokser den afhængige variabel  $y$  med  $a$ .

**Bemærk:** Hvis  $a$  er et negativt tal, vil  $y$ -værdien *aftage*, når  $x$ -værdien vokser.

Gennemfør selv argumentet for følgende:

Når  $x$ -værdien vokser med  $2$ , så vokser  $y$ -værdien med  $2a$ .

Når  $x$ -værdien vokser med  $3$ , så vokser  $y$ -værdien med  $3a$ .

En tilvækst i  $x$ -værdien kaldes ofte  $\Delta x$ , og tilsvarende kaldes en tilvækst i  $y$ -værdien  $\Delta y$ .

Når  $x$ -værdien generelt vokser med  $\Delta x$ , så vokser  $y$ -værdien med  $a \cdot \Delta x$ , dvs.  $\Delta y = a \cdot \Delta x$ .

*$y$ -tilvæksten er altså proportional med  $x$ -tilvæksten.*



Vi sammenfatter dette afsnit i en sætning.

**Sætning 1:** Den grafiske betydning af  $a$  og  $b$  for funktioner med forskrift  $f(x) = ax + b$ .

1. Grafen skærer  $y$ -aksen i punktet  $(0, b)$ .
2. Når  $a$  er positiv, er  $f(x) = ax + b$  en voksende funktion.  
Når  $x$ -værdien vokser med 1, vokser  $y$ -værdien med  $a$ .  
Når  $x$ -værdien vokser med  $\Delta x$ , så vokser  $y$ -værdien med  $a \cdot \Delta x$ , dvs.  $\Delta y = a \cdot \Delta x$ .
3. Når  $a$  er negativ, er  $f(x) = ax + b$  en aftagende funktion.  
Når  $x$ -værdien vokser med 1, aftager  $y$ -værdien med  $a$ .  
Når  $x$ -værdien vokser med  $\Delta x$ , så aftager  $y$ -værdien med  $a \cdot \Delta x$ , dvs.  $\Delta y = a \cdot \Delta x$ .
4. Når  $a$  er 0, er  $y = ax + b$  en konstant funktion  $y = b$ .

### 8.1 Grafen for lineære funktioner

Selv om man kunne synes, det ligger i navnet, at grafen for en lineær funktion må være en ret linje, så skal man passe på. Det er bare et navn, vi har givet bestemte funktioner, nemlig dem, der kan beskrives ved en forskrift af typen  $f(x) = ax + b$ .

Men følgende sætning fortæller at navnet *lineær funktion* er velvalgt.

#### Sætning 2

1. Enhver ret linje, der ikke er lodret, er graf for en lineær funktion.
2. Grafen for en lineær funktion er en ret linje, der ikke er lodret.



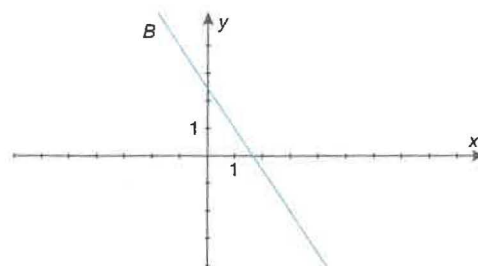
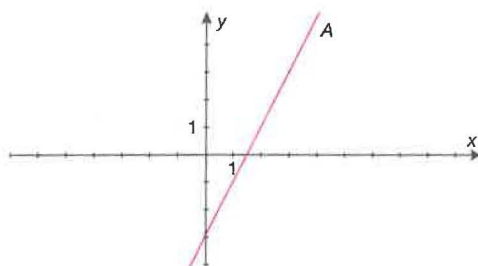
#### Bevis (især for A-niveau)

Beviset kan ses på bogens **website**.

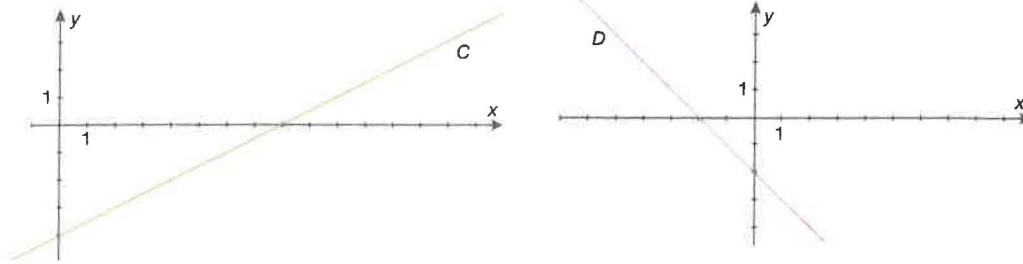
#### Øvelse 1.44

Man kan anvende sætning 1 til at oversætte fra graf til formel og hurtigt skitsere grafer ud fra regneforskrifter, når det drejer sig om lineære funktioner.

- a) Bestem en forskrift for hver af de lineære funktioner, der har følgende rette linjer som grafer:



## 1. Variabelsammenhænge og lineære funktioner



b) Tegn i hånden graferne for:

1)  $f(x) = 2x + 3$     2)  $f(x) = -x - 2$     3)  $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$

### 8.2 Regneforskrift for den lineære funktion

Hvis der i et koordinatsystem er givet to punkter, bestemmer de en ret linje, og hvis en sådan ret linje ikke ligger lodret, er den graf for en bestemt lineær funktion  $f(x) = ax + b$ . Regneforskriften for denne lineære funktion må derfor kunne bestemmes, dvs. vi må kunne finde tallene  $a$  og  $b$ .

Når en opgave lyder, *bestem den lineære funktion, hvis graf går gennem to givne punkter*, betyder det, at vi skal bestemme de to konstanter  $a$  og  $b$  og konkludere ved at opskrive formelen  $f(x) = ax + b$ , med de to konstanter indsat.

#### Eksempel: Beregning af forskriften ud fra 2 punkter

Vi vil bestemme forskriften for den lineære funktion, hvis graf går gennem punkterne  $(3,5)$  og  $(8,15)$ .

##### Metode 1

Forskriften for den lineære funktion er  $f(x) = ax + b$ .

Først danner man sig et overblik ved hjælp af en tabel, idet vi husker, at  $y = f(x)$ .

Ud fra tabellen ser vi, at når  $x$ -værdien vokser med 5, så vokser  $y$ -værdien med 10.

Dvs.  $5 \cdot a = 10$  og derfor er  $a = 2$ , hvorfor forskriften er  $f(x) = 2x + b$ .

Vi bestemmer  $b$  ved at indsætte et punkt.

Der er frit valg – vi indsætter  $(8,15)$ :

$$\begin{aligned} 15 &= 2 \cdot 8 + b \\ 15 &= 16 + b \\ 15 - 16 &= b \\ b &= -1 \end{aligned}$$

**Konklusion:** Den lineære funktion har forskriften:  $f(x) = 2x - 1$ .

|              |   |    |
|--------------|---|----|
| $+5$         |   |    |
|              |   |    |
| $x$          | 3 | 8  |
| $y$          | 5 | 15 |
| $+5 \cdot a$ |   |    |

### Metode 2

Punkterne ligger på grafen og passer derfor ind i forskriften. Vi indsætter de to punkter i hver sin ligning og får:

$$15 = a \cdot 8 + b$$

$$5 = a \cdot 3 + b$$

Dette kalder vi for et system af to ligninger med to ubekendte, nemlig  $a$  og  $b$ .

Hvis vi trækker den nederste ligning fra den øverste, kan vi se, at  $b$  forsvinder, så vi ender med én ligning med én ubekendt:

$$15 - 5 = 8a - 3a$$

$$10 = 5a$$

$$a = \frac{10}{5} = 2$$

Nu kan vi indsætte  $a$  i en af de to ligninger ovenfor og bestemme  $b$ .

Der er frit valg – vi indsætter i den øverste:

$$15 = 2 \cdot 8 + b$$

$$15 = 16 + b$$

$$15 - 16 = b$$

$$b = -1$$

**Konklusion:** Den lineære funktion har forskriften:  $f(x) = 2x - 1$ .

Havde vi indsat  $a$  i den anden ligning, havde vi fået samme  $b$ -værdi.

Ofte anvendes det andet punkt som *kontrol*: Hvis det er den korrekte ligning, så skal punktet  $(3,5)$ , der ligger på grafen, også opfylde ligningen. Indsæt  $(3,5)$  i  $f(x) = 2x - 1$ :

$$5 = 2 \cdot 3 - 1$$

$$5 = 5$$

### Eksempel: Regler for ligningsløsning

De regler for ligningsløsning, vi har anvendt ovenfor, er kendt fra folkeskolen. I det videre matematikforløb i gymnasiet vil du møde en mere systematisk gennemgang af ligningsløsning med og uden værktøjsprogrammer.

### Øvelse 1.45

Bestem regneforskrifterne for de lineære funktioner, hvis grafer går gennem:

1)  $(0,4)$  og  $(20,9)$       2)  $(5,12)$  og  $(-11,36)$       3)  $(7,9)$  og  $(28,9)$

4)  $(17,68)$  og  $(42,218)$       5)  $(-3,7)$  og  $(7,-3)$       6)  $(-15,-23)$  og  $(0,2)$

## 1. Variabelsammenhænge og lineære funktioner

### Øvelse 1.46

Bestem en ligning for den lineære funktion, hvis graf:

- a) går gennem  $(0, -5)$  og har stigningstallet  $a = 4,2$ .
- b) går gennem  $(321, 467)$  og har stigningstallet  $a = -1$ .
- c) går gennem  $(-34, 0)$  og har stigningstallet  $a = 1,5$ .

### Øvelse 1.47

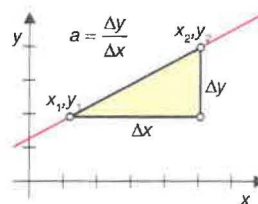
Med et værktøjsprogram kunne vi også bestemme regneforskriften ved at anvende lineær regression på de to punkter. Med to punkter vil linjen og regressionslinjen selvfølgelig stemme 100% overens (overvej hvorfor!). Hvis linjen er vandret, vil forklaringsgraden  $r^2$  ikke være defineret, fordi  $y$ -værdien i dette tilfælde er uafhængig af  $x$ -værdien. Bestem forskriften ved hjælp af lineær regression for et par af opgaverne i øvelse 1.45.

Rette linjer spiller en stor rolle, også som en tilnærmelse til grafer der ikke er lineære. Det skyldes, at stort set alle grafer er lineære "lokalt", dvs. hvis vi zoomer ind på et meget lille område af en graf, så vil den fremtræde mere og mere som en ret linje. Bl.a. derfor er vi interesserede i en formel for hældningskoefficienten fordi den også kan fortælle noget om egenskaber ved funktioner, der ikke er lineære.

### Sætning 3

Hvis grafen for den lineære funktion  $f(x) = ax + b$  går gennem punkterne  $(x_1, y_1)$  og  $(x_2, y_2)$ , kan hældningskoefficienten beregnes med formlen:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{eller} \quad a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



### Bevis

Vi går frem som i eksemplets Metode 2.

Punkterne ligger på grafen og passer derfor ind i ligningen  $y = ax + b$ .

Vi indsætter de to punkter i hver sin ligning og får:

$$y_2 = a \cdot x_2 + b$$

$$y_1 = a \cdot x_1 + b$$

Hvis vi trækker den nederste ligning fra den øverste, kan vi se, at  $b$  forsvinder, så vi ender med én ligning med én ubekendt:

$$y_2 - y_1 = (a \cdot x_2 + b) - (a \cdot x_1 + b)$$

$$y_2 - y_1 = a \cdot x_2 + b - a \cdot x_1 - b$$

$$y_2 - y_1 = a \cdot x_2 - a \cdot x_1$$

$$y_2 - y_1 = a \cdot (x_2 - x_1)$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$$

Parentesregler

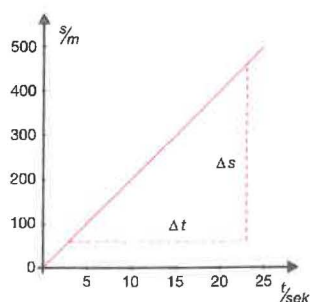
Reduktion

$a$  sættes uden for parentes

$a$  isoleres ved at dividere  $(x_2 - x_1)$  over

Husk, at hele tallet  $y_2 - y_1$  divideres med hele tallet  $x_2 - x_1$ . Hermed er formelen vist.



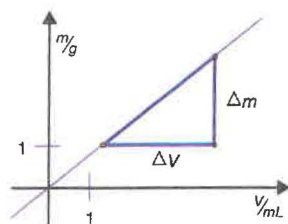
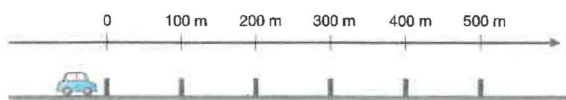


### Eksempel: Hastighed som hældningskoefficient

Ved en bevægelse med konstant hastighed  $v$  vil sammenhængen mellem strækningen  $s$  og tiden  $t$  være lineær, og hastigheden er netop hældningskoefficienten:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{400 \text{ m}}{20 \text{ sek}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{sek}}$$

Hvis de involverede variable er størrelser med enheder, bør hældningen også anføres med enheder. Hvis fx strækningen måles i meter og tiden i sekunder, bør hastigheden, dvs. hældningen, derfor som vist angives med enheden  $\frac{\text{m}}{\text{sek}}$ .



### Eksempel: Densitet som hældningskoefficient

I et laboratorium vejer man forskellige portioner af en bestemt væske. Der laves en grafisk fremstilling af tabelværdierne over sammenhængen mellem væskens masse  $m$  og dens rumfang  $V$ . Sammenhængen er en *ligefrem proportionalitet* og hældningen vil netop angive væskens densitet:

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{118 \text{ g}}{150 \text{ mL}} = 0,79 \frac{\text{g}}{\text{mL}}$$

Hvis de involverede variable er størrelser med enheder, bør hældningen også anføres med enheder. Hvis fx massen måles i gram og rumfanget i milliliter, bør densiteten/hældningen derfor angives med enheden  $\text{g/mL}$ .

### Øvelse 1.48

Anvend formelen i sætning 3 til at bestemme nogle af hældningskoefficienterne i øvelse 1.45.

### Opgaver

I kapitel 4 findes en række opgaver om lineære funktioner.